Elements de correction SN FPV

Exercice 1 :

1) $h(x,y) = \sin\left(\frac{xy}{|x|+|y|}\right)$.

Mq h admet une limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Posons $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$ $\quad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{xy}{|x|+|y|} \end{array}$.

alors on $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

$$h(x,y) = (f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)).$$

En utilisant un changement de variable en coordonnées polaires on voit que

1/8

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \forall r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ \forall\theta}} f(g(r\cos\theta, r\sin\theta))$.

mais : $g(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r(|\cos\theta| + |\sin\theta|)}$

$$= r\left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{|\cos\theta| + |\sin\theta|}\right)$$

mais $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $\begin{cases} 0 \leq |\cos\theta| \leq 1 \\ 0 \leq |\sin\theta| \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad 0 < |\cos\theta| + |\sin\theta| \leq 2$ car $|\cos\theta| + |\sin\theta| \neq 0$

Ainsi $\theta \, \forall \in [0, 2\pi]$; $0 < \frac{1}{|\cos\theta| + |\sin\theta|} \leq \frac{1}{2}$

ainsi

$$|g(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r \left(\frac{|\cos\theta \sin\theta|}{2} \right)$$

2/8

$$\leq \frac{r}{2}.$$

En passant à la limite lorsque r tend vers 0 pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on voit que g admet une limite en $(0,0)$ qui est 0. et comme Sin est continue en 0 en $\sin(0) = 0$, alors a directement par composition.

$$\lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} h(x,y) = 0.$$

2) - $g(x,y) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$.

Considérons la suite $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2} \right)$, cette suite converge vers $(0,0)$ mais

$$\lim_{n \to +\infty} g\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{n}{\sqrt{2}} \right)$$ qui n'existe pas, donc g n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 2 : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

* Etudions la continuité de f en $(0,0)$

la fonctionnelle f n'est pas continue en $(0,0)$.

En effet, considerons la suite de points $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, elle converge bien vers $(0,0)$, pour autant on voit que :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

3/8

Posons $X = \frac{1}{n}$ ainsi $X \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ ainsi ;

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{X\to 0} \frac{2}{X^2}\left(\sin(X)\right)^2$$

or $\sin X = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)$. , ainsi :

$$\lim_{X\to 0}\frac{2}{X^2}\left(\sin(X)\right)^2 = \lim_{X\to 0}\frac{2}{X^2}\left(X-\frac{X^3}{6}+o(X^3)\right)\left(X-\frac{X^3}{6}+o(X^3)\right)$$

$$= \lim_{X\to 0}\frac{2}{X^2}\left(X^2+o(X^2)\right)$$

$$= \lim_{X\to 0}\left(2+o(X^2)\right) = 2 \neq 0.$$

Ainsi f n'est pas continue en $(0,0)$.

Etudions la différentiabilité de f en $(0,0)$:

D'après ce qui précède, f n'est pas continue en $(0,0)$, donc f n'est pas $\neq$ble en $(0,0)$.

Etudions la dérivabilité de f en $(0,0)$.

Il suffit de voir si les dérivées partielles de en $(0,0)$ existent et sont continues.

Posons $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, on a :

4/8

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)\sin(0)}{0+t^2} = 0 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(0)\sin(t)}{t^2+0} = 0$$

Ainsi f est dérivable en $(0,0)$.

Exercice 3 :

1) confert TD ou cours Magistral

2). $E = \mathcal{C}^0([a,b])$.

$$f(v) = \int_a^b (v(x))^2 dx + \int_a^b v(x) dx \quad \forall v \in E.$$

Mq f ≠ble sur E et determinons sa ≠lle.

Soit $v \in E$, soit $h \in E$, cherchons une applications linéaires continue $L_v : E \to E$ telle que

$$f(v+h) = f(v) + L_v(h) + \|h\|_E \, \varepsilon(h) \quad \text{avec :}$$

$$\varepsilon : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ h \longmapsto \varepsilon(h) \to 0 \\ \qquad \|h\|_E \to 0 \end{array}$$

5/8

on a :

$$f(v+h) = \int_a^b (v(x)+h(x))^2 dx + \int_a^b (v(x)+h(x)) dx.$$

$$= \int_a^b (v(x)^2 + 2v(x)h(x) + h^2(x)) dx + \int_a^b (v(x) + h(x)) dx.$$

$$= \int_a^b v^2(x) dx + \int_a^b v(x) dx + \int_a^b 2v(x)h(x) + \int_a^b h(x) dx + \int_a^b h^2(x) dx$$

$$= f(v) + L_v(h) + \int_a^b h^2(x) dx$$

où on a posé :

$$L_v(h) = \int_a^b 2v(x)h(x)dx + \int_a^b h(x)dx.$$

on voit bien que L_v est linéaire continue et de plus : l'application :

$$\|h\|_2 = \left(\int_a^b h^2(x)dx\right)^{1/2}$$ est une norme sur E et on voit que :

$$\lim_{\|h\|_2 \to 0} \int_a^b h^2(x)dx = \lim_{\|h\|_2 \to 0} \|h\|_2 \|h\|_2 = 0.$$ 6/8

d'où f est ∃ble sur E et $\forall v \in E$, $\forall h \in E$ telle que $v+h \in E$, on a :

$$L_v(h) = \int_a^b 2v(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$

est la ~~diff~~ différentielle en tout point v de E.

3) on réalise une subdivision ;

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b.$$

$$E = \{v \in \mathcal{C}^0([a,b]),\ v_{|[x_i, x_{i+1}]}(x) = a_i x + b_i,\ i = 1, \dots, n\}$$

où $v_{|[x_i, x_{i+1}]}$ est la restriction de v sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

3.1- Mq E est un s.e.v. de $\mathcal{C}^0([a,b])$.

- on voit clairement que $E \subseteq \mathcal{C}^0([a,b])$

i) Mq $E \neq \emptyset$.

En effet la fonction nulle de $\mathcal{C}^0([a,b])$ appartient belle et bien à E car $v_{1[x_i,x_{i+1}]}(x) = 0x + 0$

donc $a_i = b_i = 0$ $\forall i = 1, \dots n$.

ii) Mq $\forall v_1, v_2 \in E$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in E$

Soient $v_1, v_2 \in E$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a!

$v_1 \in E \Leftrightarrow \exists (a_i, b_i)_{i=1}^n$ tq $v_1(x) = a_i x + b_i$ $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\forall i = 1, \dots, n-1$

$v_2 \in E \Leftrightarrow \exists (\bar{a}_i, \bar{b}_i)_{i=1}^n$ tq $v_2(x) = \bar{a}_i x + \bar{b}_i$ $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\forall i = 1, \dots, n-1$

7/8

ainsi: $\exists (a_i, b_i)_{i=1}^n, (\bar{a}_i, \bar{b}_i)_{i=1}^n$ tq!

$\lambda_1 v_1(x) + \lambda_2 v_2(x) = (\lambda_1 a_i + \lambda_2 \bar{a}_i) x + (\lambda_1 b_i + \lambda_2 \bar{b}_i)$.

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\forall i = 1, \dots, n-1$.

d'où $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in E$.

Conclusion E est un s-e-v de $\mathcal{C}^0([a,b])$

Mq (e_i) est une base de E.

Montrons que la famille $\{e_i\}$ est libre et génératrice de E.

Mq la famille $\{e_i\}$ est ~~lib~~ libre

Il s'agit de montrer que $\forall (\lambda_j)_{j=1}^{n}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j(x) = 0 \ \forall x \in [a,b] \implies \lambda_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, n$$

Soit $x \in [a,b]$.

Comme $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$, alors en particulier pour $x = x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j(x_i) = 0$$ or par definition

$$e_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$, cela dit

on trouve

8/8

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j(x_i) = \lambda_j e_j(x_j) = \lambda_j(1) = \lambda_j = 0$$

$\forall j = 1, \dots, n$, d'où le résultat.

Mq la famille est génératrice

Il suffit de remarque que

$\forall v \in E$, $v(x) = \sum_{j=1}^{} e_j(x) \cdot (a_i x + b_i) \ \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$

3-2- Dérivée partielle de f :

on a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha) =$